

Международная актуарная нотация

Актуарная нотация была разработана Джорджем Кингом в 1887 году и принята на втором Международном актуарном конгрессе в 1898 году. Небольшие изменения в нее были внесены на третьем Международном конгрессе в 1900 году. Последние уточнения в актуарную нотацию были внесены в 1954 на 14 Международном актуарном конгрессе.

Основные принципы, на которых базируется система обозначений, заключаются в следующем:

- с каждым основным символом связаны вспомогательные, смысл которых зависит от расположения относительно основного символа;
- местоположение снизу слева от основного используется для того, чтобы показать начало и продолжительность действия;
- местоположение снизу справа от основного используется для того, чтобы показать возраст застрахованного и порядок следования событий;
- местоположение сверху справа от основного используется для того, чтобы показать периодичность событий;
- местоположение сверху слева свободное и может быть использовано для других обозначений.

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения:

- буква, заключенная в круглые скобки, например (x) , обозначает “лицо в возрасте x ”;
- буква или число, обрамленное справа углом, например \overline{n} или $\overline{15}$, обозначает временной период, равный указанному числу лет (в приведенных примерах: n лет или 15 лет).

Основные символьные обозначения

Доход

i - эффективная годовая процентная ставка;

$v = (1+i)^{-1}$ - дисконтирующий множитель, т.е. современная стоимость единицы, которая должна быть получена через год;

$d = 1-v$ - эффективная ставка дисконта;

$\delta = \log_e(1+i) = -\log_e(1-d)$ - сила процента или сила дисконта;

Таблицы смертности

- l - количество доживших;
- d - количество умерших;
- p - вероятность дожития;
- q - вероятность смерти;
- μ – интенсивность смертности;
- m - центральная норма смертности;
- a - современная стоимость аннуитета;
- s - накопленная стоимость аннуитета;
- e - ожидаемая продолжительность жизни;
- A - современная стоимость страховки;
- E - современная стоимость страхования на дожитие;
- P - годовая премия (как правило используется для обозначения нетто-премии);
- π - годовая премия (используется для обозначения специальных премий);
- V - резерв;
- W - оплаченный полис.

Далее основные символы приобретают более конкретный смысл за счет добавления соответствующих индексов.

Доход

- $i^{(m)} = m\{(1+i)^{1/m}-1\}$ - номинальная годовая процентная ставка, для процентов, начисляемых m раз в год;
- $a_{\overline{n}|} = v+v^2+\dots+v^n$ - современная стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в конце каждого года в течение n лет;
- $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1+v+v^2+\dots+v^{n-1}$ - современная стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в начале каждого года в течение n лет;
- $S_{\overline{n}|} = 1+(1+i)+(1+i)^2+\dots+(1+i)^{n-1}$ - накопленная на момент n стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в конце каждого года в течение n лет;
- $\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)+(1+i)^2+\dots+(1+i)^n$ - накопленная на момент n стоимость гарантированного аннуитета с единичными выплатами в начале каждого года в течение n лет.

Точки, расположенные над буквами a и S, используются для обозначения ускорения выплат (авансированные выплаты).

Таблицы смертности

Возраст лица обозначается индексом, расположенным внизу справа от основного символа.

l_x - количество доживших до x лет (в соответствии с таблицей смертности);

$d_x = l_x - l_{x+1}$ - количество умерших в течение года в возрасте от x до $x+1$ (в соответствии с таблицей смертности);

p_x - вероятность того, что (x) проживет не менее года;

q_x - вероятность того, что (x) умрет в течение года;

$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$ - интенсивность смертности в возрасте x ;

$m_x = d_x / \int_0^1 l_{x+t} dt$ - центральная норма смертности для возрастного интервала $(x, x+1)$;

e_x - усеченная ожидаемая остаточная продолжительность жизни (x) .

В дальнейшем будет подразумеваться (если специально не оговорено иное), что

- годовые выплаты аннуитета равны 1;
- размер страховой суммы (по дожитию и по смерти) равен 1;
- все основные символы определяют современную стоимость.

a_x - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в конце каждого года жизни;

$\ddot{a}_x = 1 + a_x$ - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в начале каждого года жизни;

A_x - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x) .

Примечание: $e_x = a_x$ для ставки дохода $i=0$.

Буква или цифра, расположенная внизу слева от основного символа, обозначает количество лет, используемое при рассмотрении вероятности или выплаты.

${}_n p_x$ - вероятность того, что (x) проживет не менее n лет;

${}_n q_x$ - вероятность того, что (x) умрет в течение n лет;

Примечание: если $n=1$, то 1 обычно опускается, как показано выше.

${}_n E_x = v^n {}_n p_x$ - современная стоимость выплаты по дожитию (x) до возраста $x+n$.

Буква или число, предшествующее вертикальной черте, означает период отсрочки.

- ${}_nq_x$ - вероятность того, что (x) умрет в течение года, отсроченного на n лет, т.е. в возрастном интервале от (x+n) до (x+n+1);
- ${}_n\ddot{a}_x$ - аннуитет для (x) с началом выплат, отложенным на n лет, т.е. выплаты начинаются с возраста x+n+1;
- ${}_n|ta_x$ - отсроченный временный аннуитет для (x) с началом выплат, отложенным на n лет, выплачиваемый в течение t лет.

Буква или число, расположенные в скобках сверху справа от основного символа, показывают число интервалов, на которые разбит год.

- $a_x^{(m)}$ - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в размере 1/m в конце каждой m-ой части года;
- $\ddot{a}_x^{(m)}$ - пожизненный аннуитет для (x) с выплатами в размере 1/m в начале каждой m-ой части года, так что
- $\ddot{a}_x^{(m)} = 1/m + a_x^{(m)}$;
- $A_x^{(m)}$ - страховка, выплачиваемая в конце m-ой части года, в которой наступила смерть (x).

Если $m \rightarrow \infty$, то над основным символом помещается горизонтальная черта.

- \bar{a} - непрерывный аннуитет;
- \bar{A} - страховка, выплачиваемая сразу после смерти.

Маленький кружок, расположенный над основным символом, показывает, что величина полная.

- $\overset{\circ}{a}$ - полный аннуитет;
- $\overset{\circ}{e}$ - ожидаемая остаточная продолжительность жизни.

Примечание: некоторые считают, что обозначение \bar{e} равноценно обозначению e . Поскольку $e_x = a_x$ при $i=0$, то ожидаемая остаточная продолжительность жизни равна \bar{a}_x при $i=0$.

Следующие правила используются, когда речь идет о жизнях нескольких лиц:

если в индексе (справа снизу от основного символа) расположено несколько букв или цифр без каких-либо дополнительных отличий, то они рассматриваются как совместный статус. Например:

$$l_{xy} = l_x \times l_y, \quad d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1;y+1}.$$

Примечание: Иногда для избежания неоднозначного понимания числа или буквы в индексе разделяются двоеточием (например, 20:30 или $x:\bar{n}$). Двоеточие было выбрано вместо точки или запятой, чтобы не было путаницы с десятичным разделителем при использовании в индексе чисел.

- a_{xyz} - аннуитет с выплатами в конце года, продолжающимися пока (x), (y) и (z) живы (пока не умер кто-либо из трех);
 A_{xyz} - страховка, выплачиваемой в конце года смерти первого из (x), (y) и (z).

Вместо жизни одного из застрахованных в индексе может быть указан конкретный срок:

- $a_{x:\bar{n}|}$ - аннуитет с выплатами, продолжающимися пока статус $x:\bar{n}|$ является действующим (активным), т.е. пока жив (x) и не истекло n лет;
 $A_{x:\bar{n}|}$ - страховка, выплачиваемая в случае нарушения статуса $x:\bar{n}|$ (статус становится недействующим или неактивным), т.е. либо в конце года смерти (x), если она произошла в течение n лет, либо по прошествии n лет, если (x) жив (смешанное страхование на n лет).

Если вертикальная черта разделяет буквы в индексе, то статус после черты должен следовать за статусом до черты:

- $a_{y|x}$ - аннуитет для (x) с выплатами, начинающимися после смерти (y) (обращенный аннуитет);
 $A_{z|xy}$ - страховка, выплачиваемая в конце года смерти первого из (x) и (y), если она наступит после смерти (z).

Если над индексом расположена горизонтальная черта, то это означает, что событием является дожитие всех указанных в индексе лиц (статус дожития). Количество доживших может быть указано буквой или числом над правым концом горизонтальной черты. Если буква над чертой, например r, заключена в квадратные скобки [r], то имеются в виду ровно r доживших. Буква r без квадратных скобок означает “по крайней мере r доживших”. Если над чертой не указано ни букв, ни цифр, то имеется в виду единица, что значит “по крайней мере 1 доживший”.

- \overline{a}_{xyz} - аннуитет с выплатами в конце года, продолжающимися пока хотя бы один из (x), (y) и (z) жив;
 a_{xyz}^2 - аннуитет с выплатами в конце года, продолжающимися пока хотя бы двое из (x), (y) и (z) живы;
 $p_{xyz}^{[2]}$ - вероятность того, что ровно двое из трех живущих (x), (y) и (z) проживут еще один год;
 ${}_nq_{xy} = {}_nq_x \times {}_nq_y$ - вероятность того, что и (x) и (y) умрут в течение следующих n лет;
 ${}_nA_{xy}$ - страховка, выплачиваемая в конце года смерти пережившего из двух застрахованных (x) или (y), если смерть произойдет в течение n лет.

Числа, расположенные над или под буквами индекса, означают порядок, в котором должна произойти смерть застрахованных. Число, помещенное над какой-либо буквой индекса, указывает лицо, смерть которого является финальным событием. Числа, расположенные под индексами показывают порядок, в котором должна произойти смерть других лиц.

- A_{xy}^1 - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если он умрет раньше (y);
- A_{xyz}^2 - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если он умрет вторым из трех (x), (y) и (z);
- A_{xyz}^2 ₁ - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если он умрет после (y), но до (z);
- $A_{xy:z}^2$ ₃ - страховка, выплачиваемая в конце года смерти последнего из двух (x) и (y), если она наступит раньше смерти (z);
- $A_{x:\overline{n}|}^1$ - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x), если она произошла в течение n лет;
- $a_{yz|x}^1$ ₁ - аннуитет с выплатами в конце каждого года жизни (x), начинающимися после смерти (y) и (z), при условии, что (z) умрет раньше (y).
или
- $a_{yz|x}^2$

Примечание: Иногда, для более четкого понимания того, что речь идет о совместном статусе, его составляющие объединяют расположенным сверху символом — . Например,

- $A_{xy:\overline{n}|}^1$ - страховка, выплачиваемая в конце года смерти (x) или (y) - первая смерть, если смерть наступит в течение n лет, т.е. это совместное страхование на срок.

В некоторых случаях, если необходимо уточнить начало выплат реверсивного аннуитета, используется специальный символ, расположенный над основным. Например:

- $a_{y|x}$ - аннуитет для (x), первая выплата производится в конце года смерти (y), т.е. в среднем через 6 месяцев;
- $\hat{a}_{y|x}$ - аннуитет для (x), первая выплата производится через год после смерти (y);
- $\overset{\circ}{a}_{y|x}$ - полный аннуитет для (x) с первой выплатой через год после смерти (y).

Годовые премии

Символ P с одним или несколькими индексами используется в простых, исключаяющих неправильное понимание, случаях и обозначает годовую премию (годовой взнос).

- P_x - размер годового взноса, обеспечивающего пожизненную страховку, выплачиваемую в конце года смерти (x);
- $P_{x:\overline{n}|}$ - размер годового взноса, обеспечивающего смешанную страховку, выплачиваемую либо в конце года смерти (x), если она произошла в течение n лет, либо по прошествии n лет (в случае дожития (x));
- P_{xy}^1 - размер годового взноса для страховки по которой страховая выплата будет произведена в конце года смерти (x), если он умрет до (y).

В случаях, рассмотренных выше, необязательно было использовать символ P вместе с основным символом, обозначающим выплату. Так вместо $P_{x:\overline{n}|}$ можно было написать $P(A_{x:\overline{n}|})$. В более сложных случаях необходимо использовать два символа. Индексы, показывающие условия выплаты страховки, связываются с основным символом (например A или a), а индексы, показывающие условия уплаты взносов, связываются с символом P .

- ${}_n\overline{P}(A_x)$ - размер годового взноса, уплачиваемого в течение n лет за страховку, которая будет выплачена в момент смерти (x);
- $P_{xy}(A_x)$ - размер годового взноса, уплачиваемого пока живы (x) и (y) за страховку, которая должна быть выплачена в конце года смерти (x);
- ${}_n\overline{P}({}_n a_x)$ - размер годового взноса, уплачиваемого в течение n лет за пожизненный аннуитет с выплатами, отложенными на n лет;
- ${}_t P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|})$ - размер годового взноса, уплачиваемого в течение t лет по m раз в год равными частями и обеспечивающего смешанное страхование (x) на срок n лет.

Примечание:

1) В общем случае символ P мог быть использован без основного символа в случаях, когда страховая сумма выплачивалась в конце года смерти. Если страховая сумма выплачивается иначе или предполагается выплата в виде аннуитета, то необходимо в обозначениях использовать основной символ.

2) $P_x^{(m)}$. Существуют два вида премий, которые уплачиваются m раз в год: премии, уплата которых прекращается сразу после смерти застрахованного, и премии, которые продолжают уплачиваться до конца года смерти застрахованного. Чтобы отличать последний из указанных видов премии букву m иногда заключают в квадратные скобки: $P_x^{[m]}$.

Резерв и оплаченный полис

${}_tV_x$ - резерв по полису обычного пожизненного страхования (x), действовавшему в течение t лет. Отметим, что расчет резерва производится до уплаты очередного взноса.

${}_tW_x$ - оплаченный полис, современная величина резерва по которому равна ${}_tV_x$.

Символы V и W в простых случаях могут использоваться самостоятельно (в качестве основных). В более сложных случаях необходимо использовать также символ, определяющий страховые выплаты:

$${}_tV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \text{ (соответствует } P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|}) \text{), } {}_tV_{(n|)ax}$$

Примечание: Как правило символы V и W используются в качестве основных (самостоятельно), если страховая сумма выплачивается в конце года смерти, а взносы уплачиваются периодически на протяжении всего срока страхования. Если взносы уплачиваются ограниченное число лет, например n , то величина резерва по прошествии t лет обозначается следующим образом ${}_tV_{[n]P(A)}$ или ${}_tV(A)$.

Если в формулах используются модифицированные переменные, то для их обозначения дополнительно могут использоваться один или несколько штрихов. Например, если в оценке резерва используется премия, отличная от нетто-премии, то она может быть обозначена P' и соответственно резерв V' . Аналогично, брутто-премия может быть обозначена P'' и соответствующий оплаченный полис W'' .

Составные символы

- (Ia) - аннуитет с ежегодными выплатами, возрастающими на 1 в год; размер первой выплаты - 1;
- (IA) - страховка, размер которой увеличивается на 1 в год; начальная величина страховки равна 1.

Если речь идет о страховании на срок, то показатели времени располагаются за круглыми скобками.

$(Ia)_{x:\overline{n}|}$ - временный возрастающий аннуитет для (x);

$(IA)_{x:\overline{n}|}^1$ - временная возрастающая страховка.

Если возрастание выплаты происходит в течение определенного срока, но при этом срок страхования (выплат) продолжается далее - символ ограничения по времени располагают сразу после буквы I.

$(I_{\overline{n}|}a)_x$ - пожизненный аннуитет с выплатами, возрастающими в течение n лет, далее выплаты остаются неизменными;

$(I_{\overline{n}|}A)_x$ - пожизненная страховка, размер которой возрастает в течение n лет, а затем остается постоянным.

Если страхование предусматривает убывающие выплаты, то для обозначения используется символ D . Естественно, убывающие выплаты всегда должны иметь ограничение по времени.

$(D_{\overline{n}|}A)_{x:\overline{n}|}^1$ - страховка, убывающая ежегодно на 1 и выплачиваемая в конце года смерти (x), если она произойдет в течение n лет; начальная стоимость страховки равна n .

Если выплаты являются изменяемыми величинами, то для их обозначения используется символ v .

(va) - аннуитет с изменяющимся размером выплат.

Коммутационные числа

Одна жизнь

$$D_x = v^x l_x$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$$

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots$$

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$$

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots$$

Для обозначения коммутационных чисел, применяемых для расчетов выплат, производимых непосредственно в момент смерти, используется горизонтальная черта, расположенная над соответствующим символом.

$$\overline{C}_x = v^{x+1/2} d_x, \text{ что является приближением } \int_0^1 v^{x+t} \mu_{x+t} l_{x+t} dt$$

$$\overline{M}_x = \overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \overline{C}_{x+2} + \dots$$

$$\overline{R}_x = \overline{M}_x + \overline{M}_{x+1} + \overline{M}_{x+2} + \dots$$

Несколько жизней

$$\begin{aligned}D_{xy} &= v^{1/2(x+y)} I_{xy} \\N_{xy} &= D_{xy} + D_{x+1;y+1} + D_{x+2;y+2} + \dots \\C_{xy} &= v^{1/2(x+y)+1} d_{xy} \\M_{xy} &= C_{xy} + C_{x+1;y+1} + C_{x+2;y+2} + \dots \\C_{xy}^1 &= v^{1/2(x+y)+1} d_x l_{y+1/2} \\M_{xy}^1 &= C_{xy}^1 + C_{x+1;y+1}^1 + C_{x+2;y+2}^1 + \dots\end{aligned}$$

Селекция

Если в индексе символ, обозначающий возраст, заключен в квадратные скобки, то это означает, что данный возраст является селективным (возраст отбора на страхование). К данному возрасту может за пределом скобок быть прибавлено еще некоторое число лет, прошедшее с момента селекции, так что весь индекс будет обозначать современный возраст.

- $l_{[x]+t}$ - число из селективной таблицы смертности, обозначающее количество лиц, отобранных в возрасте x и доживших до возраста $x+t$;
- $d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}$
- $a_{[x]}$ - пожизненный аннуитет застрахованного лица (отобранного), находящегося в данный момент в возрасте x (селекция произошла в возрасте x);
- $a_{[x-n]+n}$ - пожизненный аннуитет лица, застрахованного (отобранного) в возрасте $(x-n)$ (селекция произошла n лет назад).

$$N_{[x]} = D_{[x]} + D_{[x]+1} + D_{[x]+2} + \dots$$

$$\ddot{a}_{[x]} = N_{[x]} / D_{[x]} = 1 + a_{[x]}$$

аналогичные обозначения используются для других функций.

Заключение

В некоторых случаях международная актуарная нотация допускает разные обозначения для одних и тех же величин, например, временный аннуитет может обозначаться $a_{x:\overline{n}|}$ или ${}_n a_x$. Это является естественным следствием применяемых принципов и никакая из альтернативных форм не может быть запрещена.

Международная актуарная нотация хотя и не является исчерпывающей - в ней, в частности, отсутствуют ряд обозначений, используемых при оценивании пенсионных фондов - очень удобна тем, что она одинаково применяется во всей имеющейся мировой литературе.

При подготовке русского издания нотации основной проблемой являлось отсутствие общепринятой русскоязычной терминологии. В частности:

- авторы, по аналогии с англоязычным термином *insurance*, ввели для определения современной стоимости выплат по страхованию на случай смерти и/или дожития, термин “страховка”. Это позволяет использовать краткую запись типа: A - современная стоимость страховки, вместо A - современная стоимость выплат по смерти и/или дожитию;
- авторы использовали термин “гарантированный” аннуитет для обозначения аннуитета, не зависящего от дожития. Может быть лучше было применить термин “финансовый” аннуитет, а для аннуитета, выплачиваемого при условии дожития - страховой аннуитет?
- нам не удалось подобрать удачный термин для “реверсивного” аннуитета $a_{y|x}$, называемого в англоязычной литературе *reversionary annuities* и т.д.